

## О ВОЗБУЖДЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В.Н. Данилов, Я.Ю. Самедов

Методом возмущения проведен расчет компонент смещения упругих волн, возбуждаемых в полупространстве с периодически неровной поверхностью прямым преобразователем, по двумерной модели. Приведены численные примеры результатов расчетов при описании поверхности гармоническими функциями. Подтверждено обнаруженное ранее явление трансформации продольных волн в поперечные на периодически неровной поверхности, обуславливающее излучение поперечных волн в направлении нормали к плоскости преобразователя в его центре.

Периодическая неровность — один из типов шероховатости поверхности контролируемого изделия, образующейся, например, при станочной обработке металла [1, 2]. Наличие такой неровности влияет на амплитуды, спектральный состав и длительность упругих импульсов, излучаемых в изделие прямым преобразователем через слой контактной жидкости. В работе [2] приведены экспериментальные результаты, указывающие на влияние периодической поверхностной неровности на процесс излучения, приводящее к трансформации продольных волн в поперечные, распространяющиеся по акустической оси прямого преобразователя (в направлении нормали к плоскости преобразователя в его центре). По относительной величине амплитуды трансформированных волн и (или) изменению спектрального состава можно оценить параметры подобной шероховатости [3].

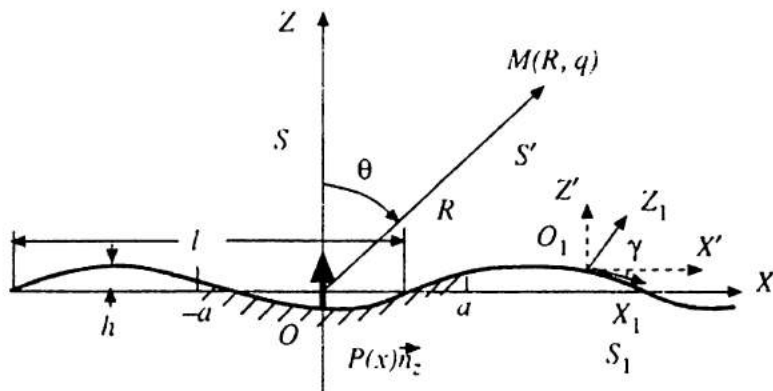


Рис. 1. Схема к расчету смещения упругих волн, возбуждаемых в полупространстве с периодически неровной поверхностью.

В данной статье проводится теоретическое изучение процесса возбуждения упругих волн в полупространстве с периодически неоднородной поверхностью с целью проверки адекватности указанного экспериментального результата в наблюдаемой картине моделирования физических процессов и оценки параметров возбуждаемых волн. Расчет проводится методом возмущения в двумерном приближении. Схема к расчету приведена на рис. 1. Неоднородная поверхность в двумерной системе  $S$  координат  $ZOX$  описывается некоторой периодической зависимостью  $z = \zeta(x)$ , причем будем считать поверхностную неровность малой, то есть полагаем, что

$$|\zeta(x)| \sim \frac{h}{l} \ll 1, \quad |\zeta'(x)| \ll 1, \quad (1)$$

где  $h$  — амплитуда неоднородности;  $l$  — пространственный период по оси  $OX$ .

На участке  $|x| \leq a$  (моделирующим действие прямого преобразователя протяженностью  $2a$  по оси  $OX$ ) поверхность нагружена нормальной силой (направленной по оси  $OZ$ )  $P(x)$  постоянной амплитуды  $P_0$  через слой контактной жидкости, однако фаза такой нагрузки определяется отклонением высоты поверхности  $z = \zeta(x)$  в данной точке от исходного значения  $z = 0$ , то есть

$$P(x) = \begin{cases} P_0 \exp [ik_g \zeta(x)], & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}, \quad (2)$$

где  $k_g$  — волновое число продольных волн в контактной жидкости. При  $|x| > a$  поверхность предполагается свободной; предполагаемая временная зависимость  $P \sim \exp(-i\omega t)$  ( $\omega$  — циклическая частота) далее в расчетах опускается.

В точке поверхности с координатой  $x$  введем координатные системы с центром в точке  $O_1-S'$ , оси  $O_1X'$  и  $O_1Z'$  которой параллельны соответствующим осям системы  $S$ , и повернутую вокруг оси  $OY$  систему  $S_1$ , ось  $O_1X_1, O_1Z_1$  которой соответственно тангенциальна и нормальна неоднородной поверхности в этой точке. В системе координат  $S_1$  нормальная и сдвиговая компоненты тензора упругого напряжения  $T_{z_1z_1}, T_{x_1z_1}$  могут быть выражены через компоненты напряжений  $T_{zz}, T_{xz}$  и  $T_{xx}$  в неповернутой системе  $S'$  в виде [4]:

$$\begin{aligned} T_{z_1z_1} &= T_{xx} \sin^2 \gamma + T_{zz} \cos^2 \gamma - 2T_{xz} \sin \gamma \cos \gamma, \\ T_{x_1z_1} &= (T_{zz} - T_{xx}) \sin \gamma \cos \gamma + T_{xz} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\gamma$  — угол (поворота) между осями  $O_1X_1$  и  $O_1X'$  ( $OX$ ).

Учитывая закон преобразования компонент тензора напряжений как тензора 2-го ранга [5] при переходе от координатной системы  $S'$  к системе с сопараллельными осями  $S$  получаем, что в обеих системах соответствующие компоненты совпадают. Таким образом в (3)  $T_{zz}, T_{xz}$  и  $T_{xx}$  — компоненты тензора напряжений в системе  $S$  ( $ZOX$ ), определяемые на поверхности  $z = \zeta(x)$ , причем значение угла  $\gamma$  может быть определено из соотношений [6]:

$$\sin \gamma = \frac{\zeta'(x)}{\sqrt{1 + [\zeta'(x)]^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + [\zeta'(x)]^2}}; \quad \zeta'(x) = \frac{d\zeta(x)}{dx}. \quad (4)$$

Подставляя соотношения (3) в выражения (4) и учитывая условия малости неровности (1), то есть пренебрегая членами

$$\sim [\zeta'(x)]^2, [\zeta(x)]^2, \zeta(x)\zeta'(x), \quad (5)$$

получаем:

$$\begin{aligned} T_{z_1z_1} &\cong T_{zz} - 2T_{xz}\zeta'(x); \\ T_{x_1z_1} &\cong (T_{zz} - T_{xx})\zeta'(x) + T_{xz}. \end{aligned} \quad (6)$$

В (6) компоненты напряжений  $T_{zz}$ ,  $T_{xz}$  и  $T_{xx}$  определяются на неровной поверхности, то есть при  $z = \zeta(x)$ . Правую часть условий (6) можно "перенести" с поверхности  $z = \zeta(x)$  на плоскость  $z = 0$  [7, 8], проведя замены

$$T_{\substack{zz \\ xx \\ xz}} \Big|_{z=\zeta} \rightarrow T_{\substack{zz \\ xx \\ xz}} + \left[ \frac{\partial}{\partial z} T_{\substack{zz \\ xx \\ xz}} \right] \zeta(x) \Big|_{z=0}, \quad (7)$$

в результате которых в координатах системы  $S$  ( $ZOX$ ) получаем, что:

$$T_{z_1 z_1} \Big|_{z=\zeta} \equiv T_{zz} + \left[ \frac{\partial}{\partial z} T_{zz} \right] \zeta(x) - 2T_{xz} \zeta'(x) \Big|_{z=0}; \quad (8)$$

$$T_{x_1 z_1} \Big|_{z=\zeta} \equiv T_{xz} + \left[ \frac{\partial}{\partial z} T_{xz} \right] \zeta(x) + (T_{zz} - T_{xx}) \zeta'(x) \Big|_{z=0}.$$

В выражениях (8) значения компонент тензора напряжений в правой части берутся на плоскости  $z = 0$ . Так как в выражениях (8) при вычислении производных по координате  $z$  появляются слагаемые  $\sim k_j \zeta$ , где  $k_j$  — волновое число продольных волн в контактной жидкости, продольных или поперечных волн в полупространстве, необходимо уточнение понятия малости неровности, поскольку помимо условий (1) необходимо дать оценку размера неровности относительно длин упругих волн. В работе [8] при описании поверхности гармонической функцией вида

$$z = \zeta(x) = h \cos(Qx) = \frac{\varepsilon}{Q} \cos(Qx),$$

где  $h$  — амплитуда неоднородности;  $Q = 2\pi/l$  ( $l$  — пространственный период), предполагается, что  $\varepsilon \ll 1$  — малый параметр, а длина взаимодействующей с неровностью упругой волны близка к периоду  $l$ , то есть  $\lambda_j \approx l$ . В этом случае получаем, что для амплитуды неоднородности должны выполняться условия:

$$h = \frac{\varepsilon}{Q}, \quad \frac{h}{l} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \ll \frac{1}{2\pi} \cong 0,15 \quad \text{или оценочно} \quad \frac{h}{l} \leq 0,02 \div 0,04,$$

$$\text{а } k_j h = \frac{2\pi h}{\lambda_j} \ll 1 \quad \text{или оценочно} \quad \frac{2\pi h}{\lambda_j} \leq 0,15 \div 0,3. \quad (9)$$

Для левой части соотношений (8) из условия скользящего контакта на границе твердой среды с контактной жидкостью [9] (отсутствие сдвиговых напряжений)

$$T_{x_1 z_1} \Big|_{z=\zeta} = 0. \quad (10)$$

Другое граничное условие с учетом внешней нагрузки (2) имеет вид

$$T_{z_1 z_1} \Big|_{z=\zeta} = \begin{cases} -P_0 \exp(ik_g z), & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \Big|_{z=\zeta}. \quad (11)$$

Используя формулы, аналогичные (7), можно “перенести” граничные условия (11) с поверхности  $z = \zeta(x)$  на плоскость  $z = 0$ . При этом получаем:

$$T_{z_1 z_1} \Big|_{z=0} = \begin{cases} -P_0, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}; \quad \frac{\partial}{\partial z} T_{z_1 z_1} \Big|_{z=0} = \begin{cases} -ik_g P_0, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}. \quad (12)$$

Согласно работам [7, 10] упругие напряжения на поверхности  $z = 0$  могут быть представлены в виде суммы невозмущенных частей и поправки, причем последние считаются величинами  $\sim \zeta$ :

$$T_{x_1 z_1} \Big|_{z=0} = \left( T_{x_1 z_1}^{(0)} + T_{x_1 z_1}^{(\Delta)} \right) \Big|_{z=0}; \quad T_{z_1 z_1} \Big|_{z=0} = \left( T_{z_1 z_1}^{(0)} + T_{z_1 z_1}^{(\Delta)} \right) \Big|_{z=0}. \quad (13)$$

Для условий скользящего контакта на поверхности  $z = 0$  равна нулю невозмущенная часть сдвигового напряжения, а с учетом (10) — и поправка, то есть:

$$T_{x_1 z_1}^{(0)} \Big|_{z=0} = 0; \quad T_{x_1 z_1}^{(\Delta)} \Big|_{z=0} = 0. \quad (14)$$

Для нормальной компоненты напряжения невозмущенная часть, обусловленная внешней нагрузкой, определяется первым из соотношений (12), а поправка — значением производной (второе соотношение), умноженным на  $\zeta(x)$ .

Пусть периодическая функция  $\zeta(x)$  представлена в виде ряда Фурье [5]:

$$\zeta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n e^{inQx}; \quad Q = \frac{2\pi}{l}; \quad \zeta_n = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \zeta(x) e^{-inQx} dx. \quad (15)$$

Тогда в формуле (13) выражения невозмущенных частей и поправок нормального напряжения с учетом граничных условий (12) и описания возмущения (15) (см. условия (1) и (9)) могут быть представлены в виде следующих интегральных преобразований Фурье [11]:

$$T_{z_1 z_1}^{(0)} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_{z_1 z_1}^{(0)}(k) e^{ikx} dk; \quad T_{z_1 z_1}^{(\Delta)} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{z_1 z_1 n}^{(\Delta)}(k) e^{ix(k+nQ)} dk;$$

$$T_{z_1 z_1}^{(0)}(k) = -2P_0 \frac{\sin(ka)}{k}; \quad T_{z_1 z_1 n}^{(\Delta)}(k) = -i2P_0 \frac{\sin(ka)}{k} k_g \zeta_n, \quad (16)$$

где коэффициенты  $\zeta_n$  определяются согласно (15).

Представим согласно [10] компоненты тензора напряжений в левой части условий (9) в виде суммы невозмущенных частей и поправок:

$$T_{zz} = T_{zz}^{(0)} + T_{zz}^{(\Delta)}; T_{xz} = T_{xz}^{(0)} + T_{xz}^{(\Delta)}; T_{xx} = T_{xx}^{(0)} + T_{xx}^{(\Delta)}, \quad (17)$$

причем поправки считаются величинами  $\sim \zeta$ , а невозмущенные компоненты напряжения удовлетворяют граничным условиям

$$T_{xz}^{(0)} = 0, \quad -\infty < x < \infty; T_{zz}^{(0)} = \begin{cases} -P_0, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}. \quad (18)$$

Подставляя представления (17) в соотношения (8) и учитывая формулы (14), (16), (18), получаем следующие граничные условия для поправок в (17):

$$T_{zz}^{(\Delta)} + \left[ \frac{\partial}{\partial z} T_{zz}^{(0)} \right] \zeta \Big|_{z=0} \equiv T_{z_1 z_1}^{(\Delta)} \Big|_{z=0}; \quad (19)$$

$$T_{xz}^{(\Delta)} + \left[ \frac{\partial}{\partial z} T_{xz}^{(0)} \right] \zeta + (T_{zz}^{(0)} - T_{xx}^{(0)}) \zeta' \Big|_{z=0} \equiv 0.$$

Значения компонент тензора напряжений  $T_{zz}^{(0)}$ ,  $T_{xz}^{(0)}$ ,  $T_{xx}^{(0)}$  в формулах (17) определяются из решения краевой задачи с граничными условиями (18) с использованием потенциальных функций  $\Phi^{(0)}$  и  $\Psi^{(0)}$ , удовлетворяющих скалярным уравнениям Гельмгольца с волновыми числами  $k_l$ ,  $k_\tau$  продольных и поперечных волн в среде.

Для функций  $\Phi^{(0)}$  и  $\Psi^{(0)}$  используем пространственные преобразования Фурье ( $z \geq 0$ ) [11]:

$$\Phi^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}^{(0)}(k) e^{ikx + iv_l z} dk; \quad \Psi^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}^{(0)}(k) e^{ikx + iv_\tau z} dk, \quad (20)$$

где  $k$  — параметр интегральных представлений;  $v_{l,\tau} = \sqrt{k_{l,\tau}^2 - k^2}$ ;  $\tilde{\Phi}^{(0)}(k)$  и  $\tilde{\Psi}^{(0)}(k)$  — трансформанты фурье-функций  $\Phi^{(0)}$  и  $\Psi^{(0)}$ .

Компоненты тензора напряжений  $T_{zz}^{(0)}$ ,  $T_{xz}^{(0)}$ ,  $T_{xx}^{(0)}$  определяются подстановкой потенциалов (20) в соотношения:

$$T_{xz}^{(0)} = \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial z^2} \right);$$

$$T_{zz}^{(0)} = \lambda \left( \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial z^2} \pm \frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x \partial z} \right); \quad (21)$$

$\lambda, \mu$  — параметры Ламэ. В результате получаем:

$$T_{xz}^{(0)} = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \left\{ -2kv_l \Phi^{(0)}(k) e^{iv_l z} + (k_\tau^2 - 2k^2) \Psi^{(0)}(k) e^{iv_\tau z} \right\};$$

$$T_{zz}^{(0)} = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \left\{ -(k_\tau^2 - 2k^2) \Phi^{(0)}(k) e^{iv_l z} \mp 2kv_\tau \Psi^{(0)}(k) e^{iv_\tau z} \right\}. \quad (22)$$

Нагрузка  $P^{(0)}(x)$  в условиях (18) также может быть представлена в виде интеграла Фурье

$$P^{(0)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P^{(0)}(k) e^{ikx} dk, \quad (23)$$

при этом трансформанта

$$P^{(0)}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} P^{(0)}(x) e^{-ikx} dx = P_0 \int_{-a}^a e^{-ikx} dx = 2aP_0 \frac{\sin(ka)}{ka}. \quad (24)$$

Подставляя интегральные представления (22) невозмущенных частей компонент тензора напряжений и нагрузки (23) в условия (18) определяем коэффициенты  $\Phi^{(0)}(k)$  и  $\Psi^{(0)}(k)$  в формулах (20), (22):

$$\Psi^{(0)}(k) = \frac{2kv_l}{\mu W(k)} P^{(0)}(k); \quad \Phi^{(0)}(k) = \frac{(k_\tau^2 - 2k^2)}{\mu W(k)} P^{(0)}(k);$$

$$W(k) = (k_\tau^2 - 2k^2)^2 + 4k^2 v_l v_\tau. \quad (25)$$

Используя соотношения (22), (25) получаем, что в условиях (19):

$$\frac{\partial}{\partial z} T_{zz}^{(0)} \Big|_{z=0} = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk P^{(0)}(k) \frac{v_l k_\tau^4}{W(k)};$$

$$\frac{\partial}{\partial z} T_{xz}^{(0)} \Big|_{z=0} = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk P^{(0)}(k) \frac{2kv_l (k_\tau^2 - 2k^2) (v_l - v_\tau)}{W(k)}; \quad (26)$$

$$(T_{zz}^{(0)} - T_{xx}^{(0)}) \Big|_{z=0} = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk P^{(0)}(k) \frac{8k^2 v_l v_\tau}{W(k)}.$$

Поправочные значения компонент тензора напряжений  $T_{zz}^{(\Delta)}$ ,  $T_{xz}^{(\Delta)}$  в (19) могут быть определены через потенциалы:

$$\Phi^{(\Delta)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n^{(\Delta)}(k) e^{ik_n x + iv_l n z} dk; \quad \Psi^{(\Delta)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n^{(\Delta)}(k) e^{ik_n x + iv_\tau n z} dk; \quad (27)$$



$$k_n = k + nQ; \quad v_{ln} = \sqrt{\frac{k_l^2 - k_n^2}{\tau}}$$

где  $\Phi_n^{(\Delta)}(k)$ ,  $\Psi_n^{(\Delta)}(k)$  — подлежащие определению коэффициенты, через которые выражаются трансформанты Фурье-функций  $\Phi^{(\Delta)}$  и  $\Psi^{(\Delta)}$ . Потенциалы (27) также удовлетворяют уравнениям Гельмгольца с волновыми числами  $k_l$ ,  $k_n$ . Используя аналогичные замены в формулах (21) и представления (27), получаем следующие выражения для поправок компонент напряжений в условиях (19):

$$T_{xz}^{(\Delta)} \Big|_{z=0} = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_n x} \left\{ -2k_n v_{ln} \Phi_n^{(\Delta)}(k) + (k_\tau^2 - 2k_n^2) \Psi_n^{(\Delta)}(k) \right\};$$

$$T_{zz}^{(\Delta)} \Big|_{z=0} = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_n x} \left\{ (k_\tau^2 - 2k_n^2) \Phi_n^{(\Delta)}(k) + 2k_n v_{ln} \Psi_n^{(\Delta)}(k) \right\}. \quad (28)$$

Подставляя соотношения (26), (28) в условия (19) с учетом поправки к нагрузке (16) получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $\Phi_n^{(\Delta)}(k)$ ,  $\Psi_n^{(\Delta)}(k)$ , из решения которой следует, что:

$$\Phi_n^{(\Delta)}(k) \equiv i\zeta_n \frac{P(k)}{\mu W(k_n)} \left[ V_{1,n}(k) (k_\tau^2 - 2k_n^2) - V_{2,n}(k) 2k_n v_{ln} \right];$$

$$\Psi_n^{(\Delta)}(k) \equiv i\zeta_n \frac{P(k)}{\mu W(k_n)} \left[ V_{1,n}(k) 2k_n v_{ln} + V_{2,n}(k) (k_\tau^2 - 2k_n^2) \right]; \quad (29)$$

$$W(k_n) = (k_\tau^2 - 2k_n^2)^2 + 4k_n^2 v_{ln} v_{\tau n}.$$

Компоненты вектора смещения  $U_x(x, z)$ ,  $U_z(x, z)$  определяются из соотношений:

$$U_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}; \quad U_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (30)$$

причем для определения невозмущенных частей  $U_{xz}^{(0)}$  используются потенциалы  $\Phi^{(0)}$  и  $\Psi^{(0)}$  (20), а поправок  $U_{xz}^{(\Delta)} = \Phi^{(\Delta)}$  и  $\Psi^{(\Delta)}$  (27). Таким образом из соотношений (20) и (30) следует, что

$$U_x^{(0)} = \frac{i}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \frac{P(k)}{W(k)} \left\{ k (k_\tau^2 - 2k^2) e^{iv_\tau z} - v_\tau 2k v_l e^{iv_\tau z} \right\};$$

$$U_z^{(0)} = \frac{i}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} v_l dk \frac{P(k)}{W(k)} \left\{ (k_\tau^2 - 2k^2) e^{iv_\tau z} + 2k^2 e^{iv_\tau z} \right\}. \quad (31)$$

В дальней зоне при выполнении по меньшей мере условий  $k_{l,\tau} R \gg 1$ ,  $R = \sqrt{x^2 + z^2}$ ,  $R \gg a$  оценка компонент вектора смещения (31) может быть выполнена асимптотически [12].

Для первых слагаемых в (34) вводится замена  $k = k_l \sin t$ ,  $dk = k_l \cos t dt$ ;  $x = R \sin \theta$ ,  $z = R \cos \theta$  (см. рис. 1). Поэтому  $kx + v_\tau z = k_l R \cos(t - \theta)$ , и в первом приближении метода перевала [13] в седловой точке  $t = t_s = \theta$  получаем сле-

дующие выражения невозмущенных компонент смещения для продольных волн:

$$U_x^{(0)} \cong \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi k_l R}} \frac{P(k_l \sin \theta)}{W(k_l \sin \theta)} k_l^2 (k_\tau^2 - 2k_l^2 \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta e^{i(k_l R + \pi/4)};$$

$$U_z^{(0)} \cong \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi k_l R}} \frac{P(k_l \sin \theta)}{W(k_l \sin \theta)} k_l^2 (k_\tau^2 - 2k_l^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \theta e^{i(k_l R + \pi/4)}. \quad (32)$$

Из формул (32) следует, что в рассматриваемом асимптотическом приближении смещение продольных волн в сферических координатах осуществляется в радиальном направлении и для невозмущенной части составляет

$$U^{(0)} = U_R^{(0)} = U_x^{(0)} \sin \theta + U_z^{(0)} \cos \theta \cong$$

$$\cong \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi k_l R}} \frac{P(k_l \sin \theta)}{W(k_l \sin \theta)} k_l^2 (k_\tau^2 - 2k_l^2 \sin^2 \theta) \cos \theta e^{i(k_l R + \pi/4)}. \quad (33)$$

Для вторых слагаемых в выражениях (31) вводится замена  $k = k_\tau \sin t$ ,  $dk = k_\tau \cos t dt$ ; при этом  $kx + v_\tau z = k_\tau R \cos(t - \theta)$ , и в первом приближении метода перевала в седловой точке  $t = t_s = \theta$  получаем следующие выражения невозмущенных компонент смещения для поперечных волн:

$$U_x^{\tau(0)} \cong -\frac{1}{\mu\sqrt{2\pi k_\tau R}} \frac{P(k_\tau \sin \theta)}{W(k_\tau \sin \theta)} 2k_\tau^3 \sqrt{k_l^2 - k_\tau^2 \sin^2 \theta} \sin \theta \cos^2 \theta e^{i(k_\tau R + \pi/4)};$$

$$U_z^{\tau(0)} \cong \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi k_\tau R}} \frac{P(k_\tau \sin \theta)}{W(k_\tau \sin \theta)} 2k_\tau^3 \sqrt{k_l^2 - k_\tau^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \theta \cos \theta e^{i(k_\tau R + \pi/4)}. \quad (34)$$

Выражения (34) могут быть не точны, если седловая точка  $t_s = \theta$  приближается к точке ветвления  $t_b = \arcsin(k_l/k_\tau)$  (третьему критическому углу, для которого  $v_l = 0$ ) [11, 14].

Из (34) получаем, что в рассматриваемом асимптотическом приближении смещение поперечных волн в сферических координатах осуществляется в тангенциальном направлении

$$U^{\tau(0)} = U_\theta^{\tau(0)} = U_x^{\tau(0)} \cos \theta - U_z^{\tau(0)} \sin \theta \cong$$

$$\cong -\frac{1}{\mu\sqrt{2\pi k_\tau R}} \frac{P(k_\tau \sin \theta)}{W(k_\tau \sin \theta)} k_\tau^3 \sqrt{k_l^2 - k_\tau^2 \sin^2 \theta} \sin(2\theta) e^{i(k_\tau R + \pi/4)}. \quad (35)$$

В формулах (32)—(35)

$$P(k_{l,\tau} \sin \theta) = 2aP_0 \frac{\sin(k_{l,\tau} a \sin \theta)}{k_{l,\tau} a \sin \theta}.$$



В рассматриваемом приближении смещение невозмущенной части продольных волн максимально в направлении  $\theta = 0$  и составляет

$$U^{l(0)} \Big|_{\theta=0} \cong \frac{2aP_0}{\mu\sqrt{2\pi k_l R}} \frac{k_l^2}{k_\tau^2} e^{i(k_l z + \pi/4)}. \quad (36)$$

Для поперечных волн в рассматриваемом асимптотическом приближении

$$U^{\tau(0)} \Big|_{\theta=0} \cong 0. \quad (37)$$

Для поправок к смещениям упругих волн вследствие влияния неоднородности поверхности из соотношений (27) и (30) получаем выражения:

$$U_x^{(\Delta)} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_n x} dk \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ k_n \Phi_n^{(\Delta)}(k) e^{iv_{ln} z} - v_{\tau n} \Psi_n^{(\Delta)}(k) e^{iv_{\tau n} z} \right\};$$

$$U_z^{(\Delta)} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_n x} dk \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ v_{ln} \Phi_n^{(\Delta)}(k) e^{iv_{ln} z} + k_n \Psi_n^{(\Delta)}(k) e^{iv_{\tau n} z} \right\}. \quad (38)$$

В формулах (38) коэффициенты  $\Phi_n^{(\Delta)}(k)$ ,  $\Psi_n^{(\Delta)}(k)$  определяются соотношениями (29). В дальней зоне оценка компонент вектора смещения (38) может быть выполнена асимптотически аналогично тому, как это выполнено для невозмущенной части смещения.

Для первых слагаемых в (38) вводится замена  $k_n = k_l \sin \theta$ ,  $dk = dk_n = k_l \cos \theta dt$ ;  $x = R \sin \theta$ ,  $z = R \cos \theta$ ,  $k_r x + v_{ln} z = k_l R \cos(t - \theta)$ . В первом приближении метода перевала в седловой точке  $t = t_s = \theta$  получаем следующие выражения поправок для компонент смещения продольных волн:

$$U_x^{l(\Delta)} \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi k_l R}} k_l^2 \sin \theta \cos \theta e^{i(k_l R + \pi/4)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n^{(\Delta)}(k_l \sin \theta - nQ);$$

$$U_z^{l(\Delta)} \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi k_l R}} k_l^2 \cos^2 \theta e^{i(k_l R + \pi/4)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n^{(\Delta)}(k_l \sin \theta - nQ);$$

$$U^{l(\Delta)} = U_R^{l(\Delta)} = U_x^{l(\Delta)} \sin \theta + U_z^{l(\Delta)} \cos \theta \cong$$

$$\cong \frac{1}{\sqrt{2\pi k_l R}} k_l^2 \cos \theta e^{i(k_l R + \pi/4)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n^{(\Delta)}(k_l \sin \theta - nQ). \quad (39)$$

Для вторых слагаемых в (38) вводится замена  $k_n = k_\tau \sin \theta$ ,  $dk = dk_n = k_\tau \cos \theta dt$ ;  $k_r x + v_{\tau n} z = k_\tau R \cos(t - \theta)$ . В первом приближении метода перевала в седловой точке  $t = t_s = \theta$  получаем следующие выражения поправок для компонент смещения поперечных волн:

$$U_x^{\tau(\Delta)} \cong -\frac{1}{\sqrt{2\pi k_\tau R}} k_\tau^2 \cos^2 \theta e^{i(k_\tau R + \pi/4)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n^{(\Delta)}(k_\tau \sin \theta - nQ);$$

$$U_z^{(\Delta)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi k_\tau R}} k_\tau^2 \sin \theta \cos \theta e^{i(k_\tau R + \pi/4)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n^{(\Delta)}(k_\tau \sin \theta - nQ);$$

$$U^{(\Delta)} = U_\theta^{(\Delta)} = U_x^{(\Delta)} \cos \theta - U_z^{(\Delta)} \sin \theta \equiv$$

$$\equiv -\frac{1}{\sqrt{2\pi k_\tau R}} k_\tau^2 \cos \theta e^{i(k_\tau R + \pi/4)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n^{(\Delta)}(k_\tau \sin \theta - nQ). \quad (40)$$

Подставляя коэффициенты  $\Phi_n^{(\Delta)}(k)$ ,  $\Psi_n^{(\Delta)}(k)$  из (29) в выражения (39) и (40), получаем следующие соотношения для поправок к значениям смещения продольных и поперечных волн:

$$U^{(\Delta)} \equiv \frac{i}{\sqrt{2\pi k_l R}} \frac{k_l^2 \cos \theta e^{i(k_l R + \pi/4)}}{\mu W(k_l \sin \theta)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n P(k_l \sin \theta - nQ) \times$$

$$\times \left[ V_{1,n}(k_l \sin \theta - nQ) (k_\tau^2 - 2k_l^2 \sin^2 \theta) - \right.$$

$$\left. - V_{2,n}(k_l \sin \theta - nQ) 2k_l \sin \theta \sqrt{k_\tau^2 - k_l^2 \sin^2 \theta} \right]; \quad (41)$$

$$U^{(\Delta)} \equiv -\frac{i}{\sqrt{2\pi k_\tau R}} \frac{k_\tau^2 \cos \theta e^{i(k_\tau R + \pi/4)}}{\mu W(k_\tau \sin \theta)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n P(k_\tau \sin \theta - nQ) \times$$

$$\times \left[ V_{1,n}(k_\tau \sin \theta - nQ) 2k_\tau \sin \theta \sqrt{k_l^2 - k_\tau^2 \sin^2 \theta} + \right.$$

$$\left. + V_{2,n}(k_\tau \sin \theta - nQ) k_\tau^2 (1 - 2 \sin^2 \theta) \right].$$

Пусть поверхность описывается гармонической зависимостью

$$z = z(x) = h \sin(Qx) = -\frac{ih}{2} [e^{iQx} - e^{-iQx}], \quad (42)$$

где  $Q = \frac{2\pi}{l}$ ;  $\zeta_1 = -\frac{ih}{2}$ ;  $\zeta_{-1} = \frac{ih}{2}$ , а все остальные коэффициенты  $\zeta$  равны 0.

Поэтому, используя (42), (39) и (41), получаем, что для такой модели поверхности (центру преобразователя соответствует значение текущей высоты поверхности  $z = \zeta(0) = 0$ ):

$$U^{(\Delta)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi k_l R}} \frac{k_l^2 \cos \theta e^{i(k_l R + \pi/4)}}{\mu W(k_l \sin \theta)} \frac{h}{2} \left\{ P(k_l \sin \theta - Q) \left[ V_{1,1}(k_l \sin \theta - Q) \times \right. \right.$$

$$\times (k_\tau^2 - 2k_l^2 \sin^2 \theta) - V_{2,1}(k_l \sin \theta - Q) 2k_l \sin \theta \sqrt{k_\tau^2 - k_l^2 \sin^2 \theta} \left. \right] - P(k_l \sin \theta + Q) \times$$

$$\times \left[ V_{1,-1}(k_l \sin \theta + Q)(k_\tau^2 - 2k_l^2 \sin^2 \theta) - V_{2,-1}(k_l \sin \theta + Q) 2k_l \sin \theta \sqrt{k_\tau^2 - k_l^2 \sin^2 \theta} \right]; \quad (43)$$

$$U^{\pi(\Delta)} \cong -\frac{1}{\sqrt{2\pi k_\tau R}} \frac{k_\tau^3 \cos \theta e^{i(k_\tau R + \pi/4)}}{\mu W(k_\tau \sin \theta)} \frac{h}{2} \left\{ P(k_\tau \sin \theta - Q) \left[ V_{1,1}(k_\tau \sin \theta - Q) \times \right. \right. \\ \times 2 \sin \theta \sqrt{k_l^2 - k_\tau^2 \sin^2 \theta} + V_{2,1}(k_\tau \sin \theta - Q) k_\tau (1 - 2 \sin^2 \theta) \left. \right] - P(k_\tau \sin \theta + Q) \times \\ \times \left[ V_{1,-1}(k_\tau \sin \theta + Q) 2 \sin \theta \sqrt{k_l^2 - k_\tau^2 \sin^2 \theta} + \right. \\ \left. + V_{2,-1}(k_\tau \sin \theta + Q) k_\tau (1 - 2 \sin^2 \theta) \right] \left. \right\}. \quad (44)$$

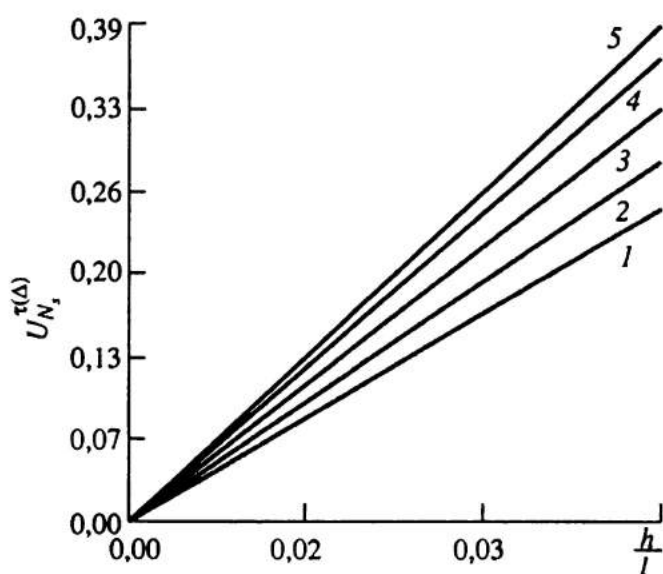


Рис. 2. Зависимость нормированного значения поправки смещения поперечной волны для синусоидального закона описания поверхности  $U_{N_s}^{\pi(\Delta)}$  от относительной амплитуды неровности  $\frac{h}{l}$ :

1 —  $\frac{\lambda_l}{l} = 0,5$ ; 2 — 0,6; 3 — 0,7; 4 — 0,8; 5 — 0,9.

В предельном случае  $\theta \rightarrow 0$ :  
для продольных волн

$$U^{l(\Delta)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi k_l R}} \frac{k_l^2 2aP_0 e^{i(k_l R + \pi/4)}}{\mu k_\tau^2} \frac{h}{2} \{ V_{1,1}(-Q) - V_{1,-1}(Q) \} = 0, \quad (45)$$

так как в этом случае

$$V_{1,1}(-Q) = V_{1,-1}(Q) = k_g - \frac{k_t^4 \sqrt{k_l^2 - Q^2}}{W(Q)}; \quad W(Q) = W(-Q); \quad P(k) \Big|_{\theta \rightarrow 0} \rightarrow 2aP_0;$$

для поперечных волн

$$U^{\tau(\Delta)} \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2\pi k_t R}} \frac{2aP_0 e^{i(k_t R + \pi/4)}}{\mu} \frac{h}{2} \{V_{2,1}(-Q) - V_{2,-1}(Q)\}; \quad V_{2,-1}(Q) = -V_{2,1}(-Q);$$

$$V_{2,1}(-Q) = -\frac{2Q \sqrt{k_l^2 - Q^2}}{W(-Q)} \left[ (k_t^2 - 2Q^2) \times \right. \quad (46)$$

$$\left. \times (\sqrt{k_l^2 - Q^2} - \sqrt{k_t^2 - Q^2}) - 4\sqrt{k_t^2 - Q^2} Q^2 \right].$$

При описании поверхности полупространства зависимостью:

$$z = z(x) = h \cos(Qx) = \frac{h}{2} [e^{iQx} + e^{-iQx}]; \quad Q = \frac{2\pi}{l}; \quad \zeta_1 = \frac{h}{2}; \quad \zeta_{-1} = \frac{h}{2}$$

формулы (43), (44) следует умножить на  $i$  и поменять знак второго слагаемого в фигурных скобках с минуса на плюс.

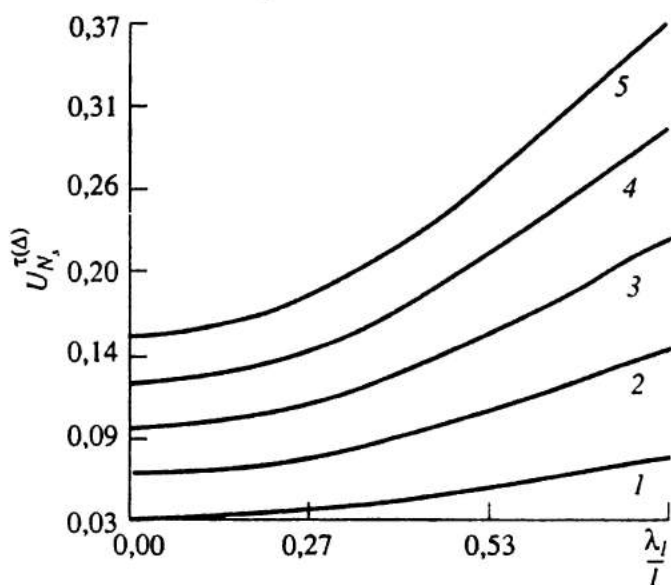


Рис. 3. Зависимость нормированного значения поправки смещения поперечной волны для синусоидального закона описания поверхности  $U_N^{\tau(\Delta)}$  от

параметра  $\frac{\lambda_l}{l}$ :

$$1 - \frac{h}{l} = 0,01; \quad 2 - 0,02; \quad 3 - 0,03; \quad 4 - 0,04; \quad 5 - 0,05.$$

В предельном случае  $\theta \rightarrow 0$ :  
для продольных волн

$$U^{\tau(\Delta)} \rightarrow \frac{i}{\sqrt{2\pi k_l R}} \frac{k_l^2 2aP_0 e^{i(k_l R + \pi/4)}}{\mu k_t^2} \frac{h}{2} \{V_{1,1}(-Q) + V_{1,-1}(Q)\}, \quad (47)$$

для поперечных волн

$$U^{\tau(\Delta)} \rightarrow -\frac{i}{\sqrt{2\pi k_\tau R}} \frac{2aP_0 e^{i(k_\tau R + \pi/4)}}{\mu} \frac{h}{2} \{V_{2,1}(-Q) + V_{2,-1}(Q)\} = 0. \quad (48)$$

Из сравнения формул (45) и (47), (46) и (48) видно, что для поверхности, описываемой синусоидальным законом, поправка для про-

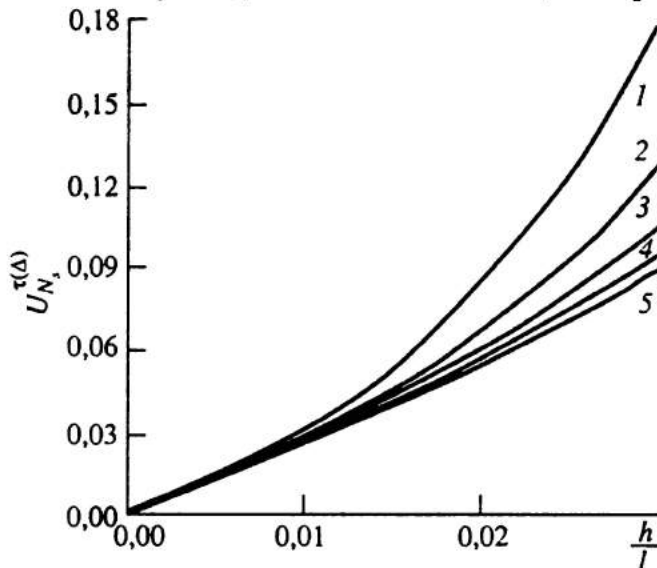


Рис. 4. Зависимость нормированного значения поправки смещения поперечной волны для синусоидального закона описания поверхности  $U_{Ns}^{\tau(\Delta)}$  от относительной амплитуды неровности  $\frac{h}{l}$ :

1 —  $kh = 0,2$ ; 2 —  $0,3$ ; 3 —  $0,4$ ; 4 —  $0,5$ ; 5 —  $0,6$ .

дольных волн равна нулю, а для поперечных — отлична от нуля (что подтверждает справедливость отмеченного выше экспериментального результата по наблюдению таких волн [2]), а для поверхности, описываемой косинусоидальным законом (центру преобразователя соответствует значение текущей высоты поверхности  $z = \zeta(0) = h$ ) нулю равна поправка для поперечных волн, а для продольных — отлична от нуля.

Численные расчеты значений поправок смещений проводились для стальной среды со скоростями продольных  $c_l = 5850$  м/с и поперечных  $c_\tau = 3260$  м/с волн для ряда значений величин параметров  $\frac{h}{l}$ ,  $\frac{Q}{k_l} = \frac{\lambda_l}{l}$  ( $\lambda_l$  —

длина продольной волны в среде),  $k_l h = \frac{2\pi h}{\lambda_l}$ ,  $\frac{\lambda_g}{l}$  ( $\lambda_g$  — длина продоль-

ной волны в контактной жидкости),  $k_g h$ ; скорость продольных волн в контактной жидкости  $c_g = 1500$  м/с; угол  $\theta = 0$ .

На рис. 2 приведена зависимость нормированного значения поправки смещения поперечной волны для синусоидального закона описания поверхности

$$U_{Ns}^{\tau(\Delta)} = U_N^{\tau(\Delta)} = \left| U^{\tau(\Delta)} / \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi k_\tau R}} \frac{2aP_0 e^{i(k_\tau R + \pi/4)}}{\mu} \right) \right| = h |V_{2,1}(-Q)| \quad (49)$$

от отношения  $\frac{h}{l}$  для нескольких значений параметра  $\frac{\lambda_l}{l}$  (от 0,5 до 0,9).

Из рисунка видно, что при приближении размера длины волны  $\lambda_l$  к величине пространственного периода  $l$  наблюдается увеличение  $U_{N_s}^{\pi(\Delta)}$ , что можно объяснить повышением эффективности трансформации падающих на неровную поверхность продольных волн из контактной жидкости в поперечные в стальной среде.

Это обстоятельство иллюстрируется также рис. 3, где приведена зависимость  $U_{N_s}^{\pi(\Delta)}$  от отношения  $\frac{\lambda_l}{l}$  для нескольких значений параметра  $\frac{h}{l}$  (от 0,01 до 0,05).

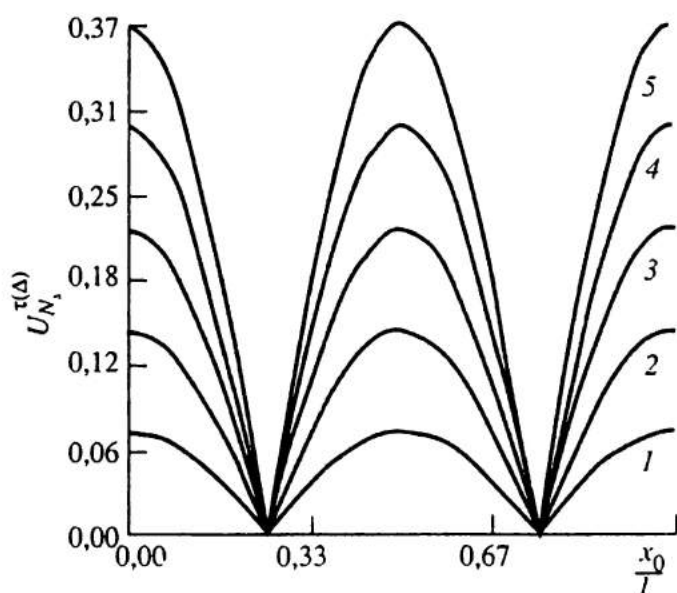


Рис. 5. Зависимость нормированного значения поправки смещения поперечной волны  $U_{N_s}^{\pi(\Delta)}$  от относительного положения центра преобразователя  $\frac{x_0}{l}$ :

$$1 - \frac{h}{l} = 0,01; 2 - 0,02; 3 - 0,03; 4 - 0,04; 5 - 0,05.$$

Рис. 4 представляет зависимость  $U_{N_s}^{\pi(\Delta)}$  от отношения  $\frac{h}{l}$  для нескольких значений параметра  $k_l h$  (от 0,2 до 0,6). Для заданной величины  $\frac{h}{l}$  увеличение значения  $k_l h$  (уменьшение  $\lambda_l$ ) приводит к уменьшению отношения  $\frac{\lambda_l}{l}$  и согласно отмеченному выше уменьшению коэффициента  $U_{N_s}^{\pi(\Delta)}$ .

Из формул (46), (48) следует, что при смещении преобразователя (центра области возбуждения) по оси  $Ox$  на расстояние  $x_0$  от положения, соответствующего описанию поверхности зависимостью (42)



нормированная амплитуда поправки  $U_N^{(\Delta)}$  (49) будет изменяться  $\sim \cos(Qx_0)$ .

На рис. 5 приведена иллюстрирующая это явление зависимость  $U_N^{(\Delta)}$  от отношения  $\frac{x_0}{l}$  (в пределах от 0 до 1) для нескольких значений параметра  $\frac{h}{l}$  (от 0,01 до 0,05) и величины  $\frac{\lambda_l}{l} = 0,8$ .

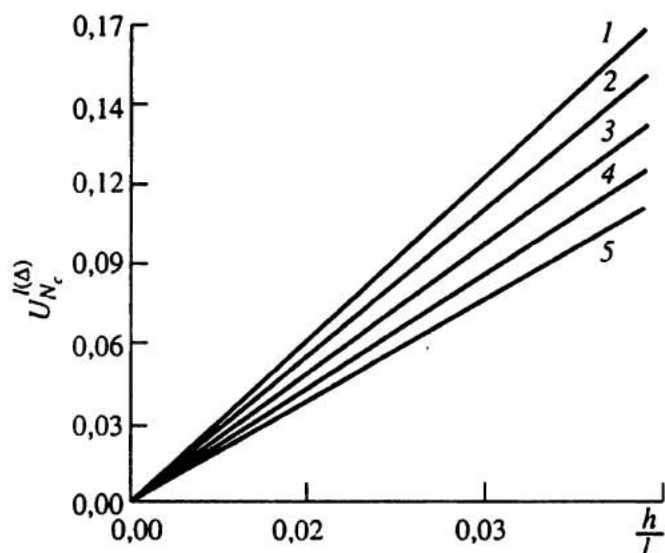


Рис. 6. Зависимость нормированного значения поправки смещения продольной волны для косинусоидального закона описания поверхности  $U_N^{(\Delta)}$  от относительной амплитуды неровности  $\frac{h}{l}$ :

$$1 - \frac{\lambda_g}{l} = 0,5; 2 - 0,6; 3 - 0,7; 4 - 0,8; 5 - 0,9.$$

На рис. 6 приведена зависимость нормированного значения поправки смещения продольной волны для косинусоидального закона описания поверхности

$$U_{N_c}^{(\Delta)} = U_N^{(\Delta)} = \left| U^{(\Delta)} / \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi k_l R}} \frac{2aP_0 e^{i(k_l R + \pi/4)}}{\mu} \right) \right| = h \frac{k_l^2}{k_c^2} |V_{1,1}(-Q)| \quad (50)$$

от отношения  $\frac{h}{l}$  для нескольких значений параметра  $\frac{\lambda_g}{l}$  (от 0,5 до 0,9).

В случае продольной волны величина поправки  $U_{N_c}^{(\Delta)}$  (50) оказывается  $\sim k_g h$  и уменьшается при относительном увеличении длины волны  $\lambda_g$  в жидкости.

На рис. 7 представлена зависимость модуля отношения поправки  $U^{(\Delta)}$  (47) и невозмущенной части  $U^{(0)}$  (33) для угла  $\theta = 0$   $\left( \left| \frac{U^{(\Delta)}}{U^{(0)}} \right|_{\theta=0} \right)$  от отноше-

ния  $\frac{\lambda_x}{l}$  (от 0,5 до 1) для нескольких значений параметра  $\frac{h}{l}$  (от 0,01 до 0,05).

Возрастание величины  $\left| \frac{U^{l(\Delta)}}{U^{l(0)}} \right|_{\theta=0}$  при уменьшении отношения  $\frac{\lambda_x}{l} < 0,5$

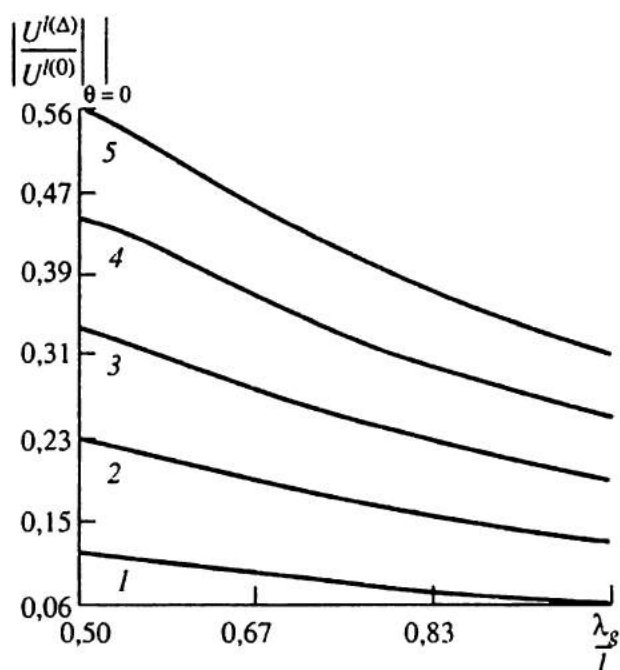


Рис. 7. Зависимость модуля отношения поправки и невозмущенной части продольной волны для косинусоидального закона описания поверхности и угла  $\theta = 0$

от параметра  $\left| \frac{U^{l(\Delta)}}{U^{l(0)}} \right|_{\theta=0}$

$$\frac{\lambda_x}{l};$$

1 —  $\frac{h}{l} = 0,01$ ; 2 — 0,02; 3 — 0,03; 4 — 0,04; 5 — 0,05.

и соответствующим возрастанием параметра  $k_x h$  связано с увеличением погрешности расчета по данной модели вследствие ухудшения выполнения условий (9).

### ВЫВОДЫ

1. Методом возмущения в двумерном приближении проведен расчет смещений продольных и поперечных упругих волн, возбуждаемых прямым преобразователем в полупространстве с периодически неоднородной поверхностью. В дальней зоне получены простые асимптотические соотношения, позволяющие оценивать невозмущенные и поправочные части смещений.

2. Подтвержден сделанный ранее экспериментальный вывод о трансформации на поверхностной неоднородности продольных волн в поперечные, распространяющиеся по акустической оси прямого преобразователя.

3. Установлено, что при гармонической аппроксимации поверхностной неоднородности и смещении преобразователя вдоль поверхности (в

направлении изменения высоты) амплитуда поправки смещения для поперечных (равно как и для продольных) волн будет также изменяться по гармоническому закону, причем для положения, соответствующего максимуму поправки для поперечных волн, поправка для продольных волн равна 0 и наоборот.

ФГУП ЦНИИТМАШ  
Москва

Поступила в редакцию  
18 июня 2003 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Самедов Я.Ю., Щербинский В.Г. Экспериментальное исследование влияния шероховатости на параметры поверхностной волны.— Дефектоскопия, 1989, № 8, с. 85—87.
2. Щербинский В.Г., Алешин Н.П. Ультразвуковой контроль сварных соединений.— М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.— 496 с.
3. Ушаков В.М., Самедов Я.Ю., Щербинский В.Г. Способ ультразвукового контроля шероховатости изделий. А.С. 1310339 (СССР).— Б.И., 1987, № 18.
4. Новацкий В. Теория упругости.— М.: Мир, 1975.— 872 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.— М.: Наука, 1974.— 832 с.
6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике.— М.: Наука, 1964.— 608 с.
7. Бреховских Л.М. О распространении поверхностных рэлеевских волн вдоль неровной границы упругого тела.— Акуст. журнал, 1959, т. 5, № 3, с. 282—289.
8. Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В. и др. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах.— М.: Наука, 1991.— 415 с.
9. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости.— М.: Наука, 1986.— 328 с.
10. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах.— М.: Наука, 1981.— 288 с.
11. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.— Киев: Наукова Думка, 1981.— 284 с.
12. Ямщиков В.С., Данилов В.Н., Шкуратник В.Л. Особенности возбуждения и приема упругих волн в твердом слое преобразователем поршневого типа.— Дефектоскопия, 1983, № 3, с. 16—23.
13. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1.— М.: Мир, 1978.— 547 с.
14. Ермолов И.Н. Теория и практика ультразвукового контроля.— М.: Машиностроение, 1981.— 240 с.